Profesor : José Cutipa

PITAGORAS ACADEMIA

HABILIDAD LÓGICA MATEMÁTICA

GRUPO PITÁGORAS

ANÁLISIS COMBINATORIO

Es parte de la Matemática que estudia el número de ordenamientos o grupos que se pueden formar con objetos o elementos.

Se responderá preguntas tales como:

¿De cuántas maneras puedo vestirme?

¿Cuántos jugos con 5 frutas distintas se pueden preparar?

⋮ ⋮

FACTORIAL DE UN NÚMERO (n!)

Se define factorial de un número n al producto de los números enteros y consecutivos desde n hasta llegar a la unidad.

$$\boxed{n! = n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1}$$

Ejemplo:

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

$$20! = 20.19.18.17\ldots.3.2.1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1 \quad (convención)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)! \qquad (no\ existe)$$

$$(-5)! \qquad (no\ existe)$$

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si una actividad A ocurre n maneras diferentes y otra actividad B ocurre de m diferentes, entonces A o B ocurren de m + n maneras diferentes.

Laura

3 líneas aéreas →

2 buses →

4 cruceros →

Laura podrá viajar:

Línea aérea	o	bus	o	crucero
3	+	2	+	4

Se podrá viajar de 9 maneras distintas

Ella solo puede elegir un medio de transporte para trasladarse.

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si una actividad A se puede realizar de m maneras y otra actividad B de n maneras diferentes. Estas actividades se realizan una a continuación de otra o de manera simultánea de m x n maneras distintas.

Antonio

3 zapatos
2 medias
4 pantalones
5 camisas

Antonio podrá vestirse usando:

Zapato	y	media	y	pantalón	y	camisa
3	x	2	x	4	x	5

Antonio se podrá verter de 120 maneras distintas

El debe elegir cada una de las prendas (todas)

PERMUTACIONES

Una permutación de objetos es un arreglo de éstos en el cual el orden de ellos sí importa.

TIPOS DE PERMUTACIÓN:

- Permutación lineal
- Permutación circular
- Permutación con elementos repetidos

PERMUTACIÓN LINEAL

Son ordenamientos que se pueden realizar con elementos diferentes en una fila o línea recta.

$$P(n) = n!$$

Ejemplo:

Cinco estudiantes compiten en una carrera de 100m, ¿De cuántas maneras pueden quedar en orden de llegada?

$$P(5) = 5 \ . \ 4 \ . \ 3 \ . \ 2 \ . \ 1 = 5!$$
$$= 120$$

Pueden llegar de 120 maneras diferentes

PERMUTACIONES

PERMUTACIÓN CIRCULAR

Se da cuando los elementos son distintos y se arreglan u ordenan alrededor de un objeto o forman una línea cerrada.

$$P_C(n) = (n-1)!$$

Ejemplo:

Jorge, Carlos, Luis, Miguel y Pedro se reúnen un domingo para conversar, sentándose en una mesa circular. ¿Dé cuántas maneras podrán ubicarse?

referencia

$$P_c(5) = (5-1)! = 4! = 24$$

Se pueden ubicar de 24 maneras distintas

PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

Se da cuando los elementos a ordenar no son distintos, es decir, hay un elemento o más de uno que se repite.

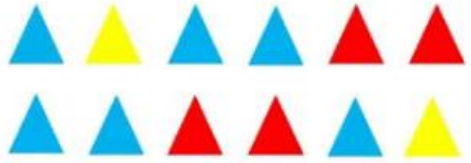
$$P^{n}_{k_1,k_2,k_3} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$

n : total de objetos
k_i: repeticiones

Ejemplo:

Se tiene 6 banderines (2 rojos, 3 celeste y 1 amarillo), si Jorge desea formar una cadeneta con ellos, ¿De cuántas maneras distintas podrá armarla?

permutan



. . .

$$P^{6}_{2,3,1} = \frac{6!}{2!\,3!\,1!} = \frac{720}{2.6.1} = 60$$

Se podrá armar la cadeneta de 60 maneras distintas

COMBINACIÓN

Las combinaciones son las diferentes formas de agrupar a los elementos de un conjunto, tomando una parte de ellos o todos a la vez. En una combinación el orden de los elementos no determina una forma diferente. Una combinación se diferencia de otra si posee al menos un elemento diferente.

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

n: total de objetos
k : grupos

1) $C_0^n = 1$
2) $C_n^n = 1$
3) $C_1^n = n$
4) $C_k^n = C_{n-k}^n$
   * $C_4^6 = C_2^6$
   * $C_5^8 = C_3^8$
5) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n = 2^n$

Ejemplo:

¿Dé cuántas formas se pueden escoger 3 polos de colores diferentes ?

Total : 8 polos
Se escogen : 3 polos

$$C_3^8 = \frac{8!}{3!\,(8-5)!} = 56$$

Ejemplo:

¿Cuántos jugos de distinto sabor se podrán preparar?

$$C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 2^4 - 1$$
$$= 15$$

ANÁLISIS COMBINATORIO

PROBLEMA 1

¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir una persona que tiene 6 ternos (2 iguales), 5 pares de medias (3 iguales), 2 pares de zapatos, 8 corbatas (2 iguales) y 6 camisas (3 iguales)?

A) 240 B) 840 C) 360 D) 1000 E) 720

SOLUCIÓN:

Consideramos prendas de vestir en modelos diferentes

PRENDAS DE VESTIR	MODELOS DIFERENTES
• 6 ternos (2 iguales)	5
• 5 pares de medias (3 iguales)	3
• 2 pares de zapatos	2
• 8 corbatas (2 iguales)	7
• 6 camisas (3 iguales)	4

Se podrá vestir de:

5 x 3 x 2 x 7 x 4 = 840 maneras diferentes

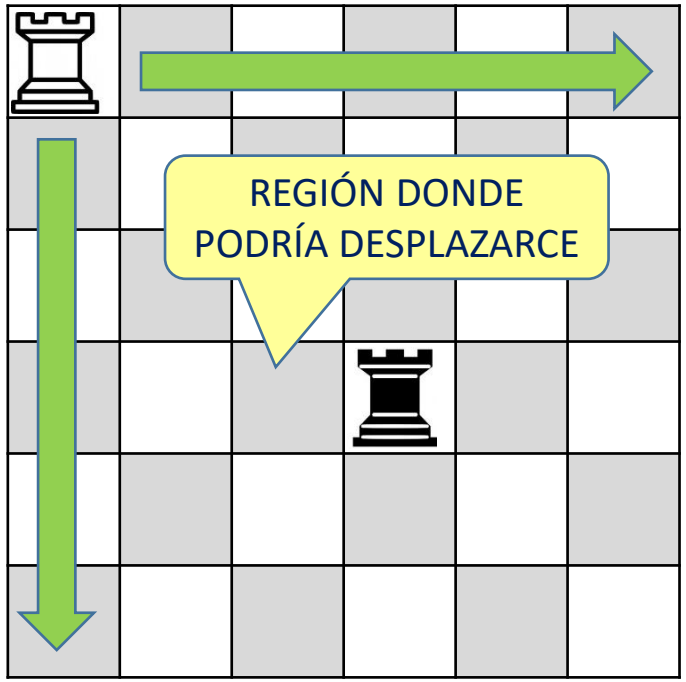
PROBLEMA 2

Se dispone de un tablero cuadriculado de 6x6 (casillas blancas y negras). ¿de cuántas maneras diferentes podrá ubicarse una torre blanca y una torre negra de tal manera que ninguna de ellas amenace a la otra?

A) 900 B) 400 C) 512 D) 30 E) 216

SOLUCIÓN:

Se debe ubicar una torre blanca y una torre negra



	Torre blanca	Torre negra
UBICANDO:	36	25

Ambas piezas se podrán ubicar de 36 x 25 = 900 maneras distintas

PROBLEMA 3

Se tienen 7 libros de matemática y 4 obras literarias diferentes. Se seleccionan 3 libros de matemática y 2 obras, y se colocan en un estante, de tal forma que las obras vaya en los extremos. Halle el número de formas en que esto se puede llevar a cabo.

A) 2240 B) 2520 C) 2340

D) 2250 E) 2000

SOLUCIÓN:

7 libros de Matemática (M)

4 obras literarias (L)

Obras literarias

4	7	6	5	3

Matemática

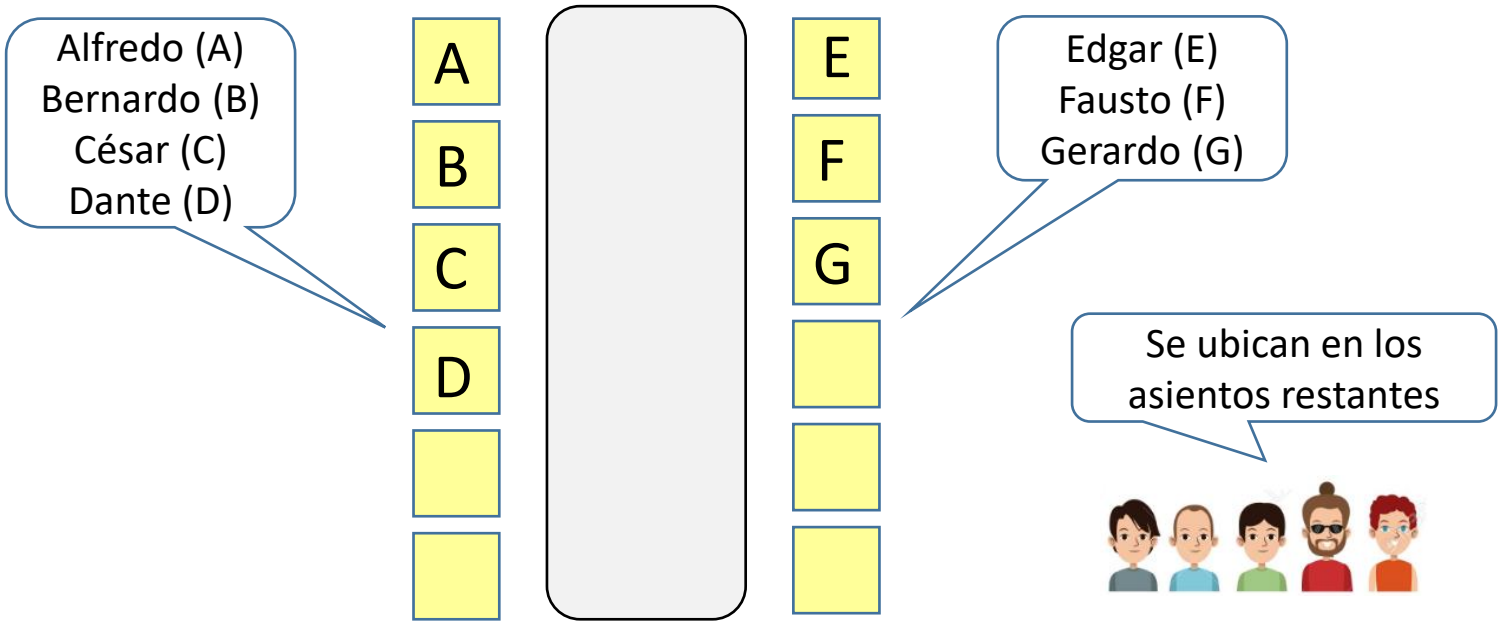
de formas para ordenar : 4x7x6x5x3 = 2520

PROBLEMA 4

Un bote que tiene 12 remos, 6 a la izquierda y 6 a la derecha, será tripulado por 12 amigos. Si Alfredo, Bernardo, César y Dante siempre reman al lado izquierdo, Edgar, Fausto y Gerardo al lado derecho, mientras que los otros en cualquier lado, calcule el producto de las cifras significativas del número de maneras diferentes en que pueden remar todos ellos.

A) 120 B) 200 C) 160
D) 240 E) 360

SOLUCIÓN:



# maneras en que pueden remar:	A	B	C	D	E	F	G	P1	P2	P3	P4	P5
	6	5	4	3	6	5	4	5!				

Se podrá remar de 5184000 maneras diferentes

El producto de cifras significativas es : $5x1x8x4 = 160$

PROBLEMA 5

Se quiere elaborar un rol de exámenes para 6 asignaturas en un período de 2 semanas, de tal manera que las asignaturas de Química y Física deberán tomarse el lunes, uno de los martes es feriado, los domingos no hay exámenes y se debe tomar a lo más un examen por día, entonces el número de maneras que se puede establecer dicho rol, es:

A) 7000 B) 6048 C) 1008

D) 504 E) 365

SOLUCIÓN:

Sean las asignaturas: QUÍ , FÍS, A1, A2, A3, A4

LU	MA	MI	JU	VI	SA
X	FERIADO	X			
X	X	X			

QUÍ - FÍS - A1 - A2 - A3 - A4

maneras en elaborar el rol de exámenes

2 1 9 8 7 6

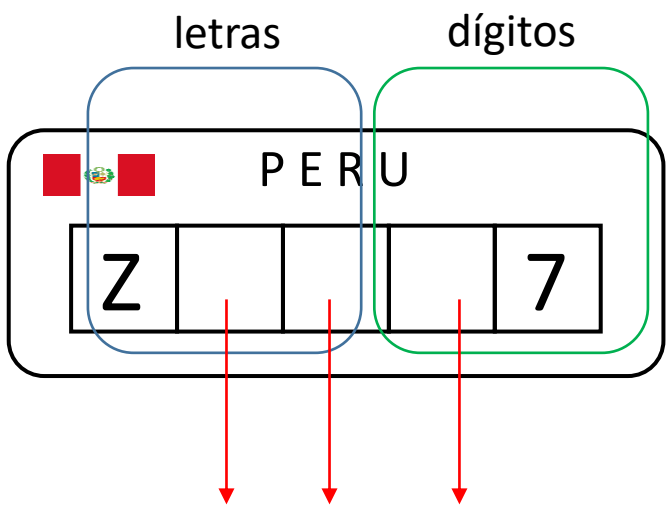
2x1x9x8x7x6= 6048

PROBLEMA 6

¿Cuantas placas de automóvil se pueden registrar como máximo tales que comiencen en Z y terminen en 7? Teniendo en cuenta que la placa se compone de 3 letras seguidas de 2 dígitos y el alfabeto tiene 27 letras.

A) 7290 B) 6800 C) 6280 D) 8100 E) 10000

SOLUCIÓN:



PLACAS : 27 . 27 . 10

Se podrán registrar 7290 placas con dichas características

PROBLEMA 7

En un torneo de ajedrez se jugaron en total 218 partidos, habiendo dos ruedas. En la primera rueda jugaron todos contra todos y en la segunda jugaron los 8 mejores. ¿Cuántos participaron en el torneo de ajedrez?

A) 20 B) 24 C) 22 D) 18 E) 19

SOLUCIÓN:

Consideremos N participantes

Todos contra todos

Los 8 mejores

partidos (1ra rueda) + # partidos (2da rueda) = 218

$$C_2^N + C_2^8$$

$$\frac{N(N-1)}{2} + \frac{8.7}{2} = 218$$

$$\frac{N(N-1)}{2} = 190$$

$$N(N-1) = 380$$

20

Participaron 20 en el torneo

PROBLEMA 8

Se tienen 6 números positivos y 8 negativos. Si se eligen 4 números arbitrariamente sin sustitución y se multiplican, ¿de cuántas formas el producto es un número positivo?

A) 273 B) 480 C) 435 D) 505 E) 240

SOLUCIÓN:

Se tiene: 6 (+) 8 (-)

Se eligen 4 números donde el producto de ellos debe ser un número positivo

[ ] [ ] [ ] [ ] = POSITIVO

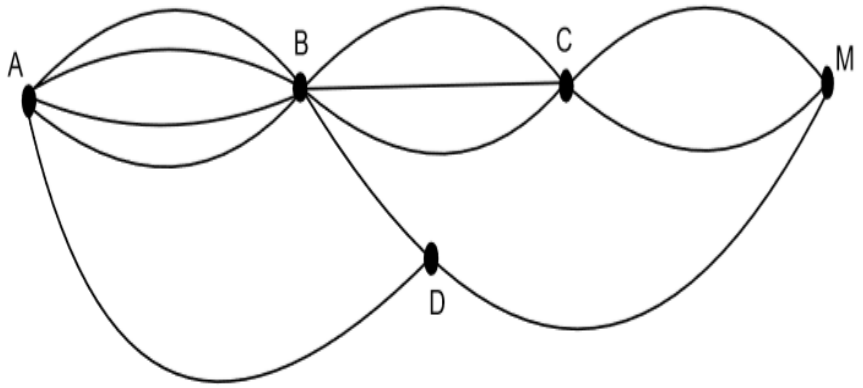
CASOS

(+) (+) (+) (+)	$C_4^6 = 15$
(+) (+) (-) (-)	$C_2^6 . C_2^8 = 15 . 28 = 420$
(-) (-) (-) (-)	$C_4^8 = 70$

El producto será positivo de: 15 + 420 + 70 = 505 formas distintas

PROBLEMA 9

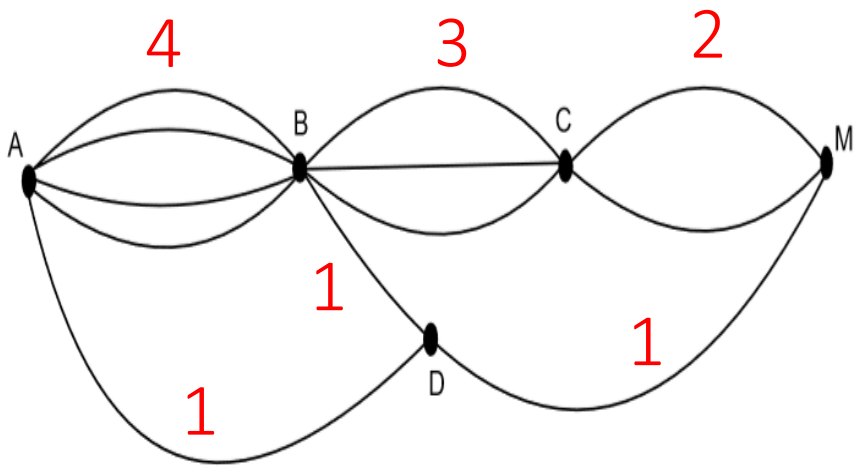
En la figura se tiene una red de caminos. ¿De cuántas maneras diferentes se puede viajar desde la ciudad A hasta la ciudad M sin pasar dos veces por el mismo lugar



A) 24 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

SOLUCIÓN:

Usando los principios de adición y multiplicación:



RUTA ABCM : 4 x 3 x 2 = 24

RUTA ABDM : 4 x 1 x 1 = 4

RUTA ADBCM : 1 x 1 x 3 x 2 = 6

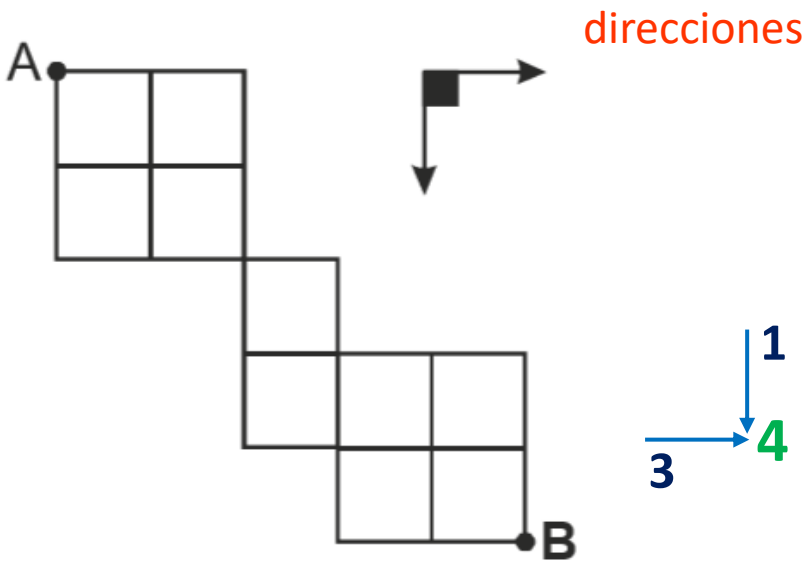
RUTA ADM : 1 x 1 x 1 = 1

RUTAS AM = 24 + 4 + 6 + 1 = 35

ANÁLISIS COMBINATORIO

MÉTODO ADITIVO (PASCAL)

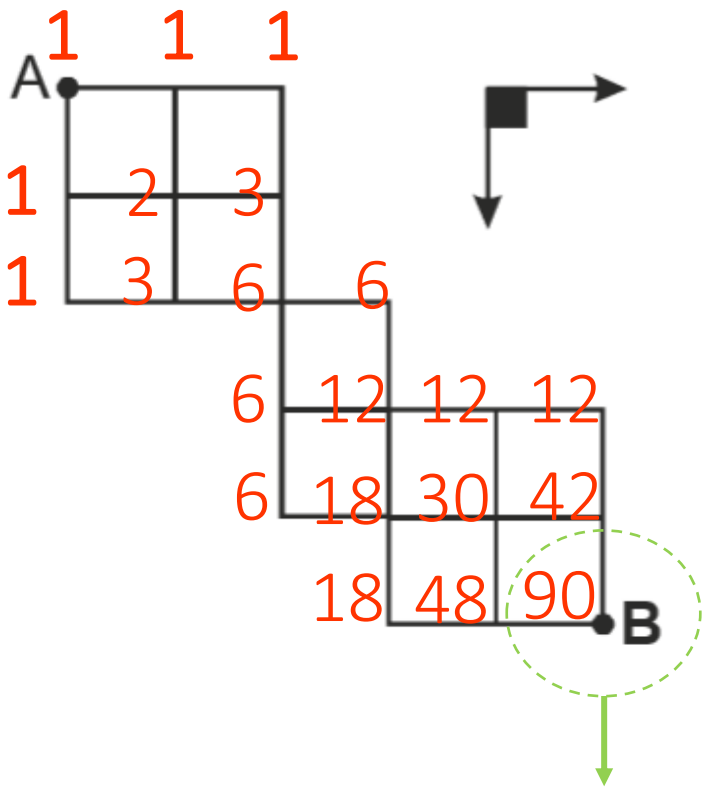
En la figura, se debe ir desde el punto A hasta el punto B. Recorriendo solo por los segmentos y en los sentidos indicados por las flechas, ¿cuántos caminos diferentes hay desde A hasta B?



Al punto de partida se le asigna el valor de 1, y se realizan adiciones sucesivas

SOLUCIÓN:

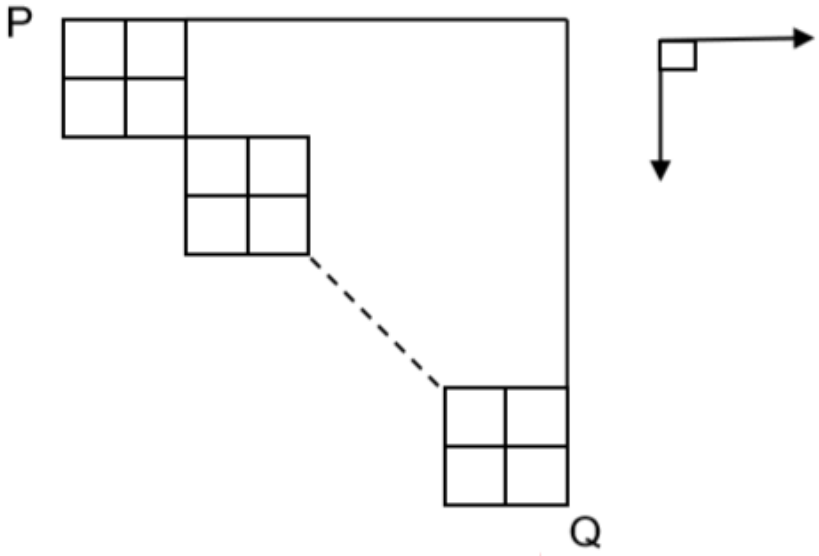
USANDO EL MÉTODO DE PASCAL



Existe 90 caminos diferentes para ir desde A hasta B

PROBLEMA 10

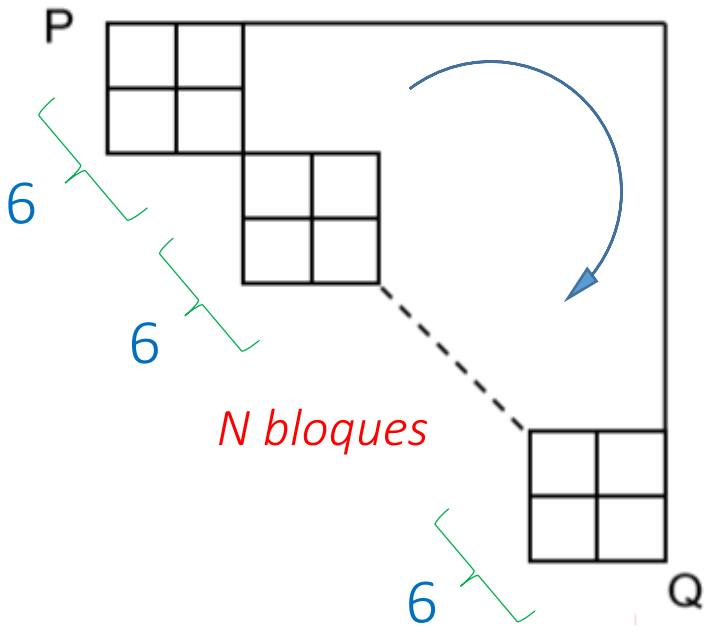
En la figura cuatro cuadraditos es un bloque. Si hay 7777 rutas para ir desde P hasta Q siguiendo las direcciones dadas por las flechas derecha o abajo, ¿cuántos bloques hay en la figura?



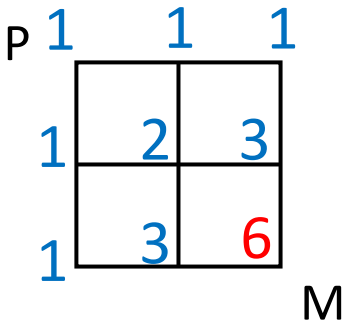
A) 5 B) 4 C) 3 D) 6

SOLUCIÓN:

Principio de adición y multiplicación



Sean N bloques



De P a M hay 6 rutas

maneras para ir de P a Q

$$6^n + 1 = 7777$$

$$6^n = 7776$$

$$n = 5$$

En la figura hay 5 bloques

CLAVES – ANÁLISIS COMBINATORIO

Ejercicios en clase		Ejercicios para el alumno	
1 B	6 A	1	6
2 A	7 A	2	7
3 B	8 D	3	8
4 C	9 C	4	9
5 B	10 A	5	10